Il teorema di Poincaré-Hopf

Luigi Caputi

29 aprile 2013

Sommario

Un fibrato vettoriale risulta essere isomorfo al fibrato banale se e solo se ammette un riferimento globale; in particolare affinché ammetta un riferimento globale, devono esistere sezioni mai nulle (ad esempio un fibrato in rette è banale se e solo se ammette una sezione mai nulla). È dunque interessante, ai fini della banalizzazione di un fibrato, cercare di capire se esistono sezioni mai nulle. Nel corso del seminario considereremo il caso particolare del fibrato tangente, e daremo la dimostrazione di un classico risultato in topologia differenziale, il teorema di Poincaré-Hopf, un teorema che mette in relazione le proprietà locali dei campi vettoriali con la caratteristica di Eulero-Poincaré, una proprietà strettamente topologica della varietà, e dà un'ostruzione all'esistenza di campi vettoriali mai nulli.

1 Richiami e risultati utili

Ricordiamo alcuni risultati e definizioni visti durante il corso e utili ai fini del seminario.

Definizione 1. Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile tra varietà. Un punto $p \in M$ è detto *punto critico* di F se $\mathrm{d}F_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ non è surgettivo.

Un *valore critico* è l'immagine di un punto critico; un *valore regolare* è un punto di $F(M)$ che non è un valore critico.

Supponiamo ora che M ed N siano due n-varietà orientate senza bordo, ed F una mappa liscia da M in N. Se M è compatta, la fibra di un valore regolare è data da un numero finito di punti, e possiamo definire il grado di F come la cardinalità con segno di tale fibra; per assegnare un segno, abbiamo però bisogno della seguente definizione:

Definizione 2. Se $F\colon M \to N$ è un diffeomorfismo locale tra varietà orientate, diciamo che F *preserva l'orientazione* se per ogni punto p di M, l'immagine di una base positivamente orientata per T_pM tramite $\mathrm{d}F_p$, è una base positivamente orientata di $T_{F(p)}N$; in caso contrario diciamo che F *inverte l'orientazione.*

Possiamo assegnare ora un segno al differenziale di F in un punto regolare $p \in M$; diciamo infatti che il segno del differenziale, $\mathrm{sgn}(\mathrm{d}F)_p$, è positivo e pari ad 1 se F preserva l'orientazione, -1 altrimeti. Ricordiamo ora la definizione di *grado*:

Definizione 3 (Grado)**.** Sia $F\colon M \to N$ una mappa liscia tra due n-varietà orientate e senza bordo, e supponiamo che M sia compatta ed N connessa. Per ogni $y \in N$ valore regolare, definiamo *grado* di F in y la somma con segno:

$$\deg(F, y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \mathrm{sgn}(\mathrm{dF}_x)$$

Data la definizione di grado, ricordiamo i seuenti risultati:

Teorema 4. 1. *Il grado* $\deg(F, y)$ *è una funzione localmente costante in* $y \in N$*, e per il teorema di Sard, è ben definita su un aperto denso di* N*.*

2. *Il grado* $\deg(F, y)$ *non dipende dalla scelta del valore regolare* y*.*

   (Poiché dunque non dipende dal valore regolare scelto, ma solo dalla mappa F, scriveremo $\deg F$ omettendo il valore regolare y).

3. *Se* F *e* G *sono isotope (di isotopia liscia) allora* $\deg(F) = \deg(G)$*.*

Prima proseguire nella trattazione, è necessario richiamare anche la definizione di orientazione per varietà a bordo; se M è una varietà con bordo, e p è un punto di bordo, possiamo distinguere in T_pM tre tipi di vettori tangenti: ci sono i vettori tangenti al bordo, ovvero i vettori tangenti in $T_p\partial M$, i vettori esterni (ovvero con componente normale esterna non nulla), e i vettori interni (a componente normale interna non nulla). Ogni orientazione per M determina un'orientazione per ∂M; infatti se M ha dimensione almeno 2, e $p \in \partial M$, scegliamo una base positivamente orientata $(v_1, \ldots, v_n) \in T_pM$, in modo che i vettori $v_2, \ldots, v_n$ siano tangenti al bordo e v_1 sia un vettore esterno. Allora diamo a M l'orientazione di $(v_2, \ldots, v_n)$. Se la dimensione di M è invece 1, ad ogni punto di bordo x assegnamo orientazione $+1$ se il vettore tangente in x è positivamente orientato, -1 altrimenti.

Concludiamo questa sezione introduttiva con una condizione necessaria alla nullità del grado, risultato che sarà importante ai fini della definizione di indice di un campo vettoriale:

Lemma 5 (Lemma di estensione)**.** *Sia* $X = X^{n+1}$ *una varietà compatta, orientata, con bordo non vuoto. Se indichiamo con* M *tale bordo, questo risulta essere una* n*-varietà compatta, che consideriamo orientata con l'orientazione indotta da* X*.*

Sia $f: M \to N$ *un'applicazione differenziabile a valori in* N n*-varietà connessa e orientabile; se* f *si estende ad una mappa liscia* $F: X \to N$*, con* $F|_M = f$*, allora* $\deg(f; y) = 0$ *per* $y \in N$ *valore regolare.*

Per la dimostrazione è utile richiamare il seguente:

Lemma 6. *Sia* $F: M^m \to N^n$ *una mappa differenziabile, dove* M *è una varietà con bordo e* $m > n$*. Supponiamo che* $y \in N$ *sia un valore regolare sia per* F *che per* $F|_{\partial M}$*; allora* $F^{-1}(y)$ *è una* $(m-n)$*-sottovarietà con bordo di* M*, e il bordo* $\partial(F^{-1}(y))$ *coincide con l'intersezione di* $F^{-1}(y)$ *con il bordo di* M*.*

Possiamo ora procedere con la dimostrazione del Lemma di estensione:

Dimostrazione. Supponiamo prima che $y \in N$ sia un valore regolare sia per f che per l'estensione F. Per il lemma precedente sappiamo che $F^{-1}(y)$ è una 1-sottovarietà con bordo di X con $\partial(F^{-1}(y)) = F^{-1}(y) \cap M$; essendo un chiuso in un compatto, è un'unione finita di archi e circonferenze in X, e i punti di bordo per tali archi sono gli unici punti della controimmagine $F^{-1}(y)$ appartenenti ad M.

Sia $A \subseteq F^{-1}(y)$ uno di tali archi, e chiamiamo a e b i suoi due punti di bordo. Se mostriamo che

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{d}f_a) + \operatorname{sgn}(\mathrm{d}f_b) = 0,$$

allora sommando su tutti gli archi A_i, che sono un numero finito, si ottiene

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\mathrm{d}f_x) = \sum_{A_i} \operatorname{sgn}(\mathrm{d}f_{a_i}) + \operatorname{sgn}(\mathrm{d}f_{b_i}) = 0$$

e quindi la tesi nel caso in cui y sia un valore regolare per f ed F.

Per provare l'uguaglianza, parametrizziamo l'arco A con la mappa $\alpha\colon [0,1] \to X$, in modo che α sia un'immersione (ci serve avere $\alpha' \neq 0$). Per ogni punto $\alpha(t) = x \in A$ indichiamo lo spazio tangente in x ad A con T_xA, e lo identifichiamo con un sottospazio lineare di T_xX tramite l'immersione α; possiamo allora scegliere, lungo α, n vettori tangenti $v_1(t), \dots, v_n(t)$ tali che $v_i(0)$ e $v_i(1)$ siano vettori tangenti di $T_{\alpha(0)}M$, $T_{\alpha(1)}M$ per ogni i, e tali che, per ogni $t \in [0,1]$, $B(t) = \{\alpha'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ sia una base di $T_{\alpha(t)}X$ orientata positivamente. Osserviamo che ciò ha senso, in quanto X è una varietà orientata, e poiché α è un'immersione ha differenziale non nullo in ogni punto, dunque $\alpha'(t)$ è effettivamente un vettore non nullo; infine, data la base $B(t)$ in un punto $\alpha(t)$, per trasporto parallelo si ottiene l'esistenza e la differenziabilità dei vettori $v_i(t)$ in ogni punto di A.

Poiché y era un valore regolare, i vettori $\{dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), dF_{\alpha(t)}(v_1(t)), \dots, dF_{\alpha(t)}(v_n(t))\}$ generano lo spazio tangente T_yN per ogni t; inoltre $dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$, e quindi

$$\{dF_{\alpha(t)}(v_1(t)), \dots, dF_{\alpha(t)}(v_n(t))\}$$

dà una base per T_yN per ogni $t \in [0,1]$.

Per costruzione, la scelta di $\{\alpha'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ dà orientazioni coerenti lungo A; inoltre sia $\{dF_{\alpha(0)}(v_1(0)), \dots, dF_{\alpha(0)}(v_n(0))\}$, sia $\{dF_{\alpha(1)}(v_1(1)), \dots, dF_{\alpha(1)}(v_n(1))\}$ danno la stessa orientazione di T_yN. Tuttavia, notiamo che il vettore $\alpha'(0)$ punta verso l'interno di X, mentre il vettore $\alpha'(1)$ verso l'esterno; dunque la base $\{v_1(1), \dots, v_n(1)\}$ ha l'orientazione coerente con quella di M indotta da X, mentre $\{v_1(0), \dots, v_n(0)\}$ ha quella opposta. Di conseguenza, come richiesto, $df_{\alpha(0)}$ e $df_{\alpha(1)}$ hanno segno discorde rispetto all'orientazione fissata di N.

Resta il caso in cui y_0 è un valore regolare per f ma non per l'estensione F; in tal caso, usando il fatto che il grado è una funzione localmente costante in y, si ottiene (per il teorema di Sard) l'esistenza in un opportuno intorno U di y_0 di un punto y regolare sia per f che per F, e ciò conclude la dimostrazione. □

2 Indice di un campo vettoriale

Ricordiamo che un campo vettoriale X su una varietà M è una sezione del fibrato tangente, ovvero una mappa C^∞ $X\colon M \to TM$ tale che per ogni $p \in M$ il vettore $X(p)$ appariene a T_pX.

Siano ora $F\colon M \to N$ una mappa liscia tra varietà, e X un campo vettoriale su M; allora per ogni punto p di M possiamo considerare il vettore tangente $\mathrm{dF}_p(X_p)$ in $\mathrm{T}_{F(p)}\mathrm{N}$, ottenuto applicando il differenziale di F al vettore X_p.

Osservazione 7. Tale assegnamento non dà, in generale, un campo vettoriale su N. Ad esempio, se F non è surgettiva, non si ha un modo univoco per scegliere un vettore per punti q di N che non appartengono a $F(M)$. Analogamente, se F non è iniettiva, allora nell'immagine dei punti di non iniettività vi saranno più vettori determinati dal differenziale di F.

Definizione 8. Se $F\colon M \to N$ è una mappa liscia e X, Y sono campi vettoriali definiti rispettivamente su M ed N, tali che $\mathrm{dF}_p(X_p) = Y_{F(p)}$ per ogni $p \in M$, allora diciamo che X e Y sono F-*correlati*.

In generale, per quanto commentato, se X è un campo su M, ed $F\colon M \to N$ è una funzione differenziabile, non è detto che esista un campo vettoriale su N F-correlato ad X; tuttavia, nel caso in cui F risulta essere un diffeomorfismo, allora un tale Y esiste ed è unico. Infatti vale la seguente:

Proposizione 9. *Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo. Allora per ogni X campo vettoriale su M esiste un unico campo vettoriale Y su N F-correlato a X.*

Dimostrazione. Se definiamo
$$Y_q = \mathrm{dF}_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$
per ogni $q \in N$, il campo che cerchiamo è certamente unico. Mostriamo allora che una mappa Y così definita sia davvero un campo vettoriale. Vediamo infatti che si ha:

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} \mathrm{TM} \xrightarrow{\mathrm{dF}} \mathrm{TN}$$

e dunque Y è la sezione cercata. □

Possiamo ora definire il concetto di indice per un campo vettoriale. Cominciamo, come di consueto, dal caso di aperti in $\mathbb{R}^n$.

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e $V\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale con uno zero isolato $z \in \Omega$. Indichiamo con Z l'insieme degli zeri di V, con $B(z,\varepsilon)$ la palla di centro z e raggio ε, e con $S(z,\varepsilon)$ la sfera di centro z e raggio ε. Allora, se $\overline{B(z,\varepsilon)} \cap Z = \{z\}$, è ben definito su $S(z,\varepsilon)$ il campo vettoriale normalizzato
$$\overline{V}(x) = \frac{V(x)}{||V(x)||}.$$
Osserviamo che $S(z,\varepsilon)$ è una varietà compatta ed orientata da $B(z,\varepsilon)$, dunque ha senso dare la seguente definizione:

Definizione 10. Chiamiamo *indice* del campo vettoriale V nello zero z, e lo indichiamo con $\iota_V(z)$, il grado della mappa $\overline{V}\colon S(z,\varepsilon) \to S^{n-1}$.

La definizione appena data, potrebbe a priori dipendere dall'intorno di z scelto, ovvero dal valore di ε. Tuttavia, utilizzando il lemma di estensione, possiamo vedere subito che la definizione è ben posta e non dipende dall'ε scelto. Siano a questo scopo $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ per cui $B(z,\varepsilon_2) \cap Z = \{z\}$, e consideriamo l'insieme $X = \{x \in \Omega \mid ||\varepsilon_1|| \le ||x - z|| \le ||\varepsilon_2||\}$, che eredita da $\mathbb{R}^n$ la struttura di varietà con bordo orientata (non è altri che la corona sferica centrata in z e di raggi ε_1, ε_2). Osserviamo inoltre che il campo vettoriale $\overline{V}$ è ben definito su tutto X, dunque, per il lemma di estensione, il grado di $\overline{V}|_{S(z,\varepsilon_1)\cup S(z,\varepsilon_2)}$ è nullo. Osserviamo infine che le due sfere ereditano da X l'orientazione opposta, e dunque

$$0 = \deg \overline{V}|_{S(z,\varepsilon_1)\cup S(z,\varepsilon_2)} = \deg \overline{V}|_{S(z,\varepsilon_2)} - \deg \overline{V}|_{S(z,\varepsilon_1)}$$

da cui la buona definizione.

Osservazione 11. La definizione di indice può esser data per ogni punto dell'aperto, non solo per gli zeri di V; tuttavia in questo caso, è facile notare (ancora per il lemma di estensione) che l'indice è nullo.

Esempio 12. Se $V\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è il campo vettoriale definito da $V(z) = z^n$, allora l'indice $\iota_V(0) = n$, in quanto il grado del campo $\overline{V}\colon S^1 \to S^1$, $\overline{V}(z) = z^n$ ha grado n.

Analogamente il campo $W(z) = \bar{z}^n$ ha indice $-n$.

La definizione appena data,vale per aperti dello spazio euclideo; possiamo allora cercare di generalizzarla al caso di n-varietà. L'idea è quella di trasportare uno zero isolato mediante carte locali, e poi ivi calcolare l'indice del campo correlato alla parametrizzazione locale. Tuttavia bisogna mostrare che l'indice, così definito, non cambia a meno di diffeomorfismi del dominio. Procediamo dunque in questa direzione, cominciando da alcuni lemmi preliminari:

Lemma 13 (Lemma di Divisione)**.** *Siano V un intorno convesso di $0 \in \mathbb{R}^n$ ed $f\colon V \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, con $f(0) = 0$. Allora esistono n funzioni differenziabili su V, $g_1, \ldots, g_n$, con $g_i(0) = \partial f/\partial x^i(0)$ per $i = 1, \ldots, n$, e tali che*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in V$.

Dimostrazione. Poiché V è un intorno convesso di 0, ed $f(0) = 0$, per $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ possiamo scrivere:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \ldots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx_1, \ldots, tx_n) x_i dt$$

Poniamo allora

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx_1, \ldots, tx_n) dt;$$

queste sono differenziabili su tutto V e verificano le proprietà richieste. □

Lemma 14. *Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo che preserva l'orientazione. Allora f è isotopo (di isotopia liscia) all'identità.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che $f(0) = 0$; per il lemma precedente f si può scrivere come somma delle funzioni g_i:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Se definiamo $F\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ come $F(x, t) = f(tx)/t$ per $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $t > 0$, e come $F(x, 0) = \mathrm{d}f_0(x)$ per $t = 0$, allora è chiaro che F è liscia per $t \neq 0$, mentre per $t = 0$ osserviamo che

$$\mathrm{d}f_0(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t}$$

e quindi è continua. Inoltre, applicando la scrittura di f come somma delle g_i, si ha:

$$F(x, t) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i g_i(tx)}{t} = x_1 g_1(tx) + \cdots + x_n g_n(tx)$$

che per $t = 0$ diventa

$$F(x, t) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(0) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x^n}(0) = \mathrm{d}f_0(x).$$

Quindi F è liscia, ed è un'isotopia tra f e $\mathrm{d}f_0$; quest'ultima, infine, è un isomorfismo lineare che preserva l'orientazione, dunque è isotopo all'identità. □

Possiamo ora dimostrare che l'indice è invariante per diffeomorfismi:

Lemma 15. *Siano U, U' due aperti in $\mathbb{R}^n$, $F\colon U \to U'$ un diffeomorfismo, e sia V un campo vettoriale definito su U. Se V' è il corrispondente campo vettoriale su U', allora l'indice di V in z zero isolato, è pari all'indice di V' in $F(z)$.*

Dimostrazione. Possiamo assumere senza perdita di generalità $F(z) = 0 = z$ e considerare U un aperto convesso. Se F preserva l'orientazione, come nel lemma precedente, possiamo costruire una famiglia di embedding
$$F_t \colon U \to \mathbb{R}^n$$
tale che $F_0 = \mathrm{id}$, $F_1 = F$, ed $F_t(0) = 0$ per ogni $t \in I$.

Sia $V_t = \mathrm{d}F_t \circ V \circ F_t^{-1}$ il campo su $F_t(U)$ F_t-correlato a V. Questi campi son tutti ben definiti e non nulli su una sfera sufficentemente piccola centrata in 0. Quindi $\iota_V(z) = \iota_{V_0}(0)$ deve essere uguale a quello di V' in 0.

Se F non preserva l'orientazione, possiamo scriverlo come composizione di una riflessione σ e di un diffeomorfismo che preserva l'orientazione, $F = \sigma G$. Per quanto appena dimostrato, ci basta allora dimostrare che anche σ preserva l'indice del campo V.

Ma infatti, se poniamo $V' = \mathrm{d}\sigma \circ V \circ \sigma^{-1}$, poiché σ è lineare, $\mathrm{d}\sigma = \sigma$ e il grado di σ è -1. Dunque $\iota_{V'}(0) = (-1)\iota_V(0)(-1) = \iota_V(0)$. □

Possiamo ora formalizzare la definizione di indice per varietà. Se $g \colon U \to M$ è una parametrizzazione locale di un intorno di z in M, allora l'indice di un campo vettoriale V in z è definito come l'indice del campo vettoriale $\mathrm{d}g^{-1} \circ V \circ g$ in $g^{-1}(z)$. Il lemma appena dimostrato ci dice che la definizione è ben posta, e non dipende dalla carta scelta. Possiamo allora enunciare il teorema di Poincaré-Hopf:

Teorema 16. *Sia V un campo vettoriale di zeri isolati su una varietà compatta M; se M ha bordo non vuoto supporremo sempre che il campo vettoriale punti verso l'esterno in tutti i punti di bordo. Allora la somma degli indici di V negli zeri isolati uguaglia la caratteristica di Eulero della varietà, ovvero*
$$\sum_{z \in Z} \iota_V(z) = \chi(M).$$

La dimostrazione del teorema consisterà di più passi; cominciamo mostrando che la somma $\sum_{z \in Z} \iota_V(z)$ non dipende dal campo vettoriale scelto, e per farlo introdurremo la cosiddetta mappa di Gauss.

3 Mappa di Gauss

Consideriamo una n-varietà con bordo M contenuta in $\mathbb{R}^n$. Allora ∂M è una $(n-1)$-varietà in $\mathbb{R}^n$, e dunque ha senso considerare in ogni punto di bordo per M il versore normale esterno; questo, a sua volta, può essere pensato come un punto di S^{n-1}. Ciò porta alla definizione di mappa di Gauss:

Definizione 17. La mappa $g \colon \partial M \to S^{n-1}$ che associa ad ogni punto $x \in M$ il versore normale esterno N_x, è detta *mappa di Gauss*.

In particolare, se M era una varietà compatta e orientata, l'orientazione di M induce un'orientazione su ∂M, e risulta ben definito il grado della mappa di Gauss, a valori nella sfera con l'orientazione standard.

Vedremo che proprio questo grado è il tassello mancante tra la somma degli indici di un campo vettoriale, e la caratteristica di Eulero-Poincaré:

Lemma 18 (Lemma di Hopf)**.** *Sia M una n-varietà di $\mathbb{R}^n$, e supponiamo che M sia compatta e con bordo non vuoto.*

Sia V un campo vettoriale definito su M di soli zeri isolati, e supponiamo che V punti verso l'esterno lungo il bordo di M. Allora

$$\sum_{z \in Z} \iota_V(z) = \deg(g)$$

e, in particolare, tale somma non dipende dal campo scelto.

Prima di cominciare la dimostrazione, facciamo un'osservazione: se M è una n-varietà liscia, una n-sottovarietà compatta con bordo $D \subseteq M$ è detto *dominio regolare in M*; un'orientazione su M dà immediatamente un'orientazione per D, ad esempio restringendo una n-forma d'orientazione a D. Esempi di questo tipo sono la palla chiusa in $\mathbb{R}^n$ o l'emisfero superiore di S^n. In entrambi i casi la sottovarietà eredita l'orientazione della varietà ambiente. Dunque, nel Lemma di Hopf, essendo M una n-sottovarietà compatta con bordo di $\mathbb{R}^n$, essa è un dominio regolare in $\mathbb{R}^n$, perciò automaticamente orientabile.

Ciò giustifica dunque la mancata ipotesi di orientabilità, ipotesi necessaria per utilizzare la mappa di Gauss, o il Lemma di estensione.

Dimostrazione. Osserviamo subito che, per ipotesi, il campo vettoriale V ristretto a ∂M non è mai nullo, in quanto diretto sempre verso l'esterno; dunque gli zeri di V sono tutti contenuti nella parte interna di M. Rimuovendo da M una palla di centro z e raggio ε_z per ogni zero isolato z di V, otteniamo una nuova varietà compatta

$$\overline{M} = M - \bigcup_{z \in Z} B(z, \varepsilon_z).$$

con bordo $\partial\overline{M} = \partial M \cup \bigcup_{z \in Z} S(z, \varepsilon_z)$, che è quindi un dominio regolare di $\mathbb{R}^n$.

Il campo vettoriale $\overline{V} = V/||V||$ ristretto a $\partial\overline{M}$ è a valori in S^{n-1}, e poiché è definito su tutto $\overline{M}$ (abbiamo tolto tutti i punti in cui V si annullava), per il lemma di estensione, ha grado 0. Se y è un valore regolare per $\overline{V}|_{\partial\overline{M}}$, possiamo ora scomporre la somma nella definizione di grado nella somma dei gradi nelle varie componenti connesse:

$$\deg \overline{V}|_{\partial\overline{M}} = \deg \overline{V}|_{(\partial M \cup \bigcup_{z \in Z} S(z, \varepsilon_z))} = \deg \overline{V}|_{\partial M} + \sum_{z \in Z} \deg \overline{V}|_{S(z, \varepsilon_z)}.$$

(Il grado è calcolato considerando sulle componenti connesse l'orientazione indotta da $\overline{M}$, che a sua volta eredita l'orientazione di $\mathbb{R}^n$).

Osserviamo adesso che $\overline{V}|_{\partial M}$ punta per ipotesi verso l'esterno, e per questo è isotopa a g (di isotopia che ad ogni punto associa la proiezione sulla normale esterna), dunque $\deg \overline{V}|_{\partial M} = \deg g$. Infine, i gradi sulle altre componenti di bordo sono l'opposto dell'indice ivi calcolato, in quanto l'orientazione indotta da $\overline{M}$ su $S(z, \varepsilon_z)$ è opposta rispetto a quella indotta da $B(z, \varepsilon_z)$, rispetto alla quale calcoliamo l'indice del campo vettoriale. Dunque $\sum_{z \in Z} -\iota_V(z) + \deg(g) = 0$, ovvero la tesi. $\square$

Esempio 19. Se un campo vettoriale di zeri isolati punta verso l'esterno in ogni punto di D^2, allora la somma degli indici è pari a 1.

L'indice di un campo vettoriale V in uno zero isolato z può essere calcolato dalle derivate prime di V in x. Vediamo però prima il caso di un campo vettoriale definito su un aperto U di $\mathbb{R}^n$. In tal caso, $V \colon U \to T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si scrive come la mappa $p \mapsto (p, v(p))$; possiamo dunque pensare a V, più semplicemente, come la mappa, che indichiamo ancora con V, definita da $p \mapsto V(p) = v(p)$.

Definizione 20. Uno zero z per V è detto *non degenere* se il differenziale $\mathrm{d}V_z \colon T_zU \simeq \mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ è una mappa lineare non singolare.

In particolare, se z è uno zero non degenere allora V è un diffeomorfismo in un intorno di z, e dunque questo è uno zero isolato.

Lemma 21. *Sia $x \in U$ uno zero non degenere per il campo V. Allora $\iota_V(x) = \pm 1$ a seconda della positività del determinante di $\mathrm{d}V_x$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathrm{d}V_x$ è non singolare, e $\dim T_xU = \dim \mathbb{R}^n = n$, si ha che V è un diffeomorfismo in un intorno di x. Allora, se V preserva l'orientazione, procedendo come nel Lemma 14 si ha che V in tale intorno è isotopo al suo differenziale, che a sua volta è ancora isotopo a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, non aggiungendo nuovi zeri. Quindi l'indice è pari ad 1.

Viceversa, se V inverte l'orientazione, allora in modo simile V può essere isotopato ad una riflessione, quindi l'indice è -1. Poiché il segno del determinante di $\mathrm{d}V_x$ è positivo se conserva l'orientazione, e negativo altrimenti, abbiamo la tesi. $\square$

Possiamo ora estendere il lemma al caso più generale di un campo vettoriale W definito su una m-varietà M contenuta in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 22. *Sia x uno zero di W. Allora l'immagine di $\mathrm{d}W_x$ è contenuta in T_xM e, posto D il determinante della mappa lineare $\mathrm{d}W_x \colon T_xM \to T_xM$, se D è non nullo allora x è uno zero isolato, e si ha $\iota_W(x) = \mathrm{sgn}(D)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare il lemma, sia (U, φ) una carta locale centrata in x, e supponiamo che φ abbia coordinate $(x^1, \dots, x^m)$. Allora, per ogni $p \in U$ la carta induce su T_pM la base $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m\}$. In più, se $\pi \colon TM \to M$ è il fibrato tangente, φ induce la banalizzazione locale $\chi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ data da $\chi(v) = (p, v)$ se e solo se $v = v^1\partial/\partial x^1 + \dots v^m\partial/\partial x^m$.

Sfruttando il fatto che $M \subseteq \mathbb{R}^n$, possiamo identificare lo spazio tangente T_pM in $p \in M$ con un sottospazio lineare dello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$; sottointenderemo questa identificazione chiamando t_i i vettori di $\mathbb{R}^n$ relativi a $\partial/\partial x^i$.

Passiamo ora alla dimostrazione del lemma: sia $(e_1, \dots, e_m)$ una base per $\varphi(U)$ e consideriamo il campo vettoriale V φ-correlato a W, ovvero $\mathrm{d}(\varphi^{-1})_u(V_u) = W_{\varphi^{-1}(u)}$ per $u \in \varphi(U)$. Se $V = \sum_j v_j e_j$, con $v_j \in C^\infty(\varphi(U))$ allora possiamo scrivere $\forall\, u \in U$ $W(\varphi^{-1}(u)) = \sum_i v_i(\varphi^{-1}(u))\partial/\partial x^i = \sum_i v_i(\varphi^{-1}(u))t_i$.

Il differenziale $\mathrm{d}W_p$ si scrive allora come lo jacobiano $(\partial(W \circ \varphi^{-1})^j/\partial x^i)$, dove $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, 2m$. Le colonne di questa matrice sono quindi le componenti del differenziale applicato all'i-esimo vettore della base di T_pM; ma per un generico $u \in \varphi(U)$ queste colonne sono date da:

$$\frac{\partial(W \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\sum_j v_j t_j = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x^i} t_j + \sum_j v_j \frac{\partial t_j}{\partial x^i}.$$

Se $\varphi^{-1}(u)$ è uno zero per W, la somma si riduce a $\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x^i} t_j \in T_{\varphi^{-1}(u)}M$ e dunque $\mathrm{d}W_x$ mappa T_xM in sé. Il determinante di questa mappa è il determinante dello jacobiano $\frac{\partial v_j}{\partial x^i}$, che chiamiamo D. Dal lemma precedente, si ha dunque che, se $D \neq 0$, $\mathrm{sgn}(D) = \iota_V(\varphi(p))$. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Si è visto, mediante il Lemma di Hopf, che se $M^m \subseteq \mathbb{R}^m$ è una varietà compatta, orientata e a bordo non vuoto, allora la somma degli indici di un qualunque campo vettoriale (con zeri isolati e che punti verso l'esterno in ∂M) è pari al grado della mappa di Gauss. Grazie ai lemmi precedenti, possiamo generalizzare questo risultato a varietà compatte e senza bordo; supporremo però che i campi vettoriali da considerare abbiano tutti gli zeri isolati e non degeneri. A questo scopo, introduciamo la notazione N_ε per indicare l'intorno tubulare chiuso di $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ dato da:

$$N_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in M : ||x - y|| \leq \varepsilon\}.$$

Dal teorema di esistenza dell'intorno tubulare, deriva il fatto che, se ε è abbastanza piccolo, N_ε è una n-varietà con bordo di $\mathbb{R}^n$, cui possiamo dunque applicare il Lemma di Hopf.

Dato il Lemma, possiamo estendere la definizione di non degenerità anche alle varietà; se infatti z è uno zero per il campo vettoriale X definito su M, il suo differenziale dà un endomorfismo dello spazio tangente T_xM. Diciamo allora che z è uno *zero non degenere* per X se $\mathrm{d}X_z \colon T_zM \to T_zM$ è non singolare

Teorema 23. *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una m-varietà compatta e senza bordo. Allora per ogni campo vettoriale $X \colon M \to TM$ di zeri non degeneri, la somma degli indici $\sum_{z \in Z} \iota_X(z)$ è pari al grado della mappa di Gauss.*

Prima di cominciare la dimostrazione del teorema, facciamo delle brevi osservazioni, a parire dalla costruzione di N_ε: per ogni punto $p \in M$ si considera lo spazio normale N_p, e poiché $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà, possiamo identificare N_p con il sottospazio affine $p + \mathbb{R}^{n-m}$, complemento ortogonale di T_pM in $\mathbb{R}^n$. Dopo questa identificazione, consideriamo l'insieme dei vettori in N_p di norma non maggiore di ε. Se dunque ε è abbastanza piccolo, N_ε risulta essere una varietà con bordo dato dal sottoinsieme di vettori di norma proprio ε. È chiaro dunque, che ad ogni punto $x \in N_\varepsilon$, possiamo associare l'unico punto $p \in M$ tale che $x \in N_p$ e $||x - p|| \leq \varepsilon$. Chiamiamo $r(x)$ tale proiezione che, poiché restrizione della proiezione definita sul fibrato normale, risulta essere C^∞. Infine è utile osservare, ai fini della dimostrazione, che il vettore $x - r(x)$, in quanto vettore nello spazio normale $N_{r(x)}$, è ortogonale allo spazio tangente $T_{r(x)}M$.

Dimostrazione. Consideriamo, come premesso, l'intorno tubulare chiuso N_ε, e per ogni $x \in N_\varepsilon$ chiamiamo $r(X)$ la proiezione sopra definitita.

Poniamo $\varphi \colon N_\varepsilon \to \mathbb{R}$ la mappa $\varphi(x) = ||x - r(x)||^2$ il cui gradiente (usiamo qui il fatto che $N_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$) è dato da $\mathrm{grad}\varphi = 2(x - r(x))$. Ricordiamo che $x - r(x)$ è ortogonale allo spazio tangente $T_{r(x)}M$, e quindi, per $x \in \partial N_\varepsilon$, si ha:

$$g(x) = \frac{\mathrm{grad}\varphi(x)}{||\mathrm{grad}\varphi(x)||} = \frac{2(x - r(x))}{||2(x - r(x))||} = \frac{x - r(x)}{\varepsilon}.$$

Estendiamo X ad un campo $\tilde{X}$ su N_ε ponendo

$$\tilde{X}(x) = (x - r(x)) + X(r(x))$$

dove la definizione data passa per l'identificazione di $T_{r(x)}N_\varepsilon$ con lo spazio ambiente $\mathbb{R}^k$.

Il prodotto scalare $\tilde{X}(x) \cdot g(x)$, calcolato per $x \in \partial N_\varepsilon$, è pari ad $\varepsilon > 0$, e dunque $\tilde{X}$ punta verso l'esterno di N_ε. Per il Lemma di Hopf dunque, $\sum_{\tilde{z} \in \tilde{Z}} \iota_{\tilde{X}}(\tilde{z}) = \deg g$, dove abbiamo indicato con $\tilde{Z}$ gli zeri di $\tilde{X}$.

Se mostriamo che $\sum_{z \in Z} \iota_X(z) = \sum_{\tilde{z} \in \tilde{Z}} \iota_{\tilde{X}}(\tilde{z})$, abbiamo dimostrato il teorema. Per prima cosa osserviamo che se $\tilde{z}$ è uno zero per $\tilde{X}$, allora $x - r(x) + X(r(x)) = 0$, e poiché i due vettori sono sempre ortogonali, deve aversi $x - r(x) = 0 = X(r(x))$, ovvero $x \in M \cap Z$. Viceversa, se $x \in M$ allora $x - r(x)$ è il vettore nullo, e se $X(x) = 0$ allora anche $\tilde{X}(x) = 0$. Quindi X e $\tilde{X}$ hanno esattamente gli stessi zeri.

Calcolando il differenziale di $\tilde{X}$ in uno di tali zeri z, otteniamo $\mathrm{d}\tilde{X}_z|_{T_zM} = \mathrm{d}X_z$ e $\mathrm{d}\tilde{X}_z|_{N_zM} = \mathrm{Id}$. Quindi il determinante di $\mathrm{d}\tilde{X}_z$ è pari a quello di $\mathrm{d}X_z$, e poiché z era non degenere, i due differenziali sono degli isomorfismi; z risulta così essere uno zero non degenere anche per $\tilde{X}$, e per il lemma precedente l'indice resta invariato, come volevasi dimostrare. □

4 Teoria di Morse

Grazie al teorema precedente, abbiamo scoperto che la somma degli indici di un campo vettoriale non degenere su una varietà compatta e senza bordo, è un invariante della varietà. Per legare questa somma alla caratteristica di Eulero-Poincaré ci basta dunque trovare un solo campo vettoriale con somma degli indici pari a $\chi(M)$. Per trovarlo, richiamiamo alcuni concetti base della teoria di Morse.

Fissiamo una m-varietà M ed una funzione differenziabile $f\colon M \to \mathbb{R}$. Se $p \in M$ è un punto critico per f il differenziale $\mathrm{d}f_p$ non è surgettivo, e quindi è la mappa nulla; ciò significa che, scelto un sistema di coordinate locali $(x^1, \dots, x^m)$ in un intorno U di p, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^m}(p) = 0.$$

Nelle coordinate scelte, possiamo dare la seguente definizione di non degenericità:

Definizione 24. Un punto critico p per f è detto *non degenere* se la matrice $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_p$ è non singolare. Chiamiamo *indice* di f in p il numero di autovalori negativi di H. Infine, chiamiamo *funzione di Morse* una mappa $f\colon M \to \mathbb{R}$ di punti critici non degeneri.

Osservazione 25. Si può verificare che la definizione appena data non dipende dal sistema di coordinate scelto, e dunque la proprietà di non degenericità, e l'indice, sono ben definiti.

Osservazione 26. Parlando di campi vettoriali abbiamo dato nelle sezioni precedenti una definizione di indice, e di non degenericità per un punto $p \in M$ all'apparenza molto diversa da quella appena vista; mostreremo in realtà che le definizioni date sono strettamente legate, da cui i nomi comuni.

Possiamo ora enunciare il fondamentale Lemma di Morse:

Lemma 27 (Lemma di Morse)**.** *Sia p un punto critico non degenere per $f\colon M \to \mathbb{R}$. Allora esiste un sistema di coordinate locali $(x^1, \dots, x^m)$ centrato in p e definito su tutto un aperto U, tale che*

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^m)^2$$

valga su tutto U, con λ l'indice di f in p.

Il prossimo passo è capire il collegamento tra le funzioni di Morse e la topologia della varietà; per farlo, cominciamo richiamando i due teoremi della teoria di Morse, e proseguendo con lo studio delle funzioni subadditive.

Notazione. Denotiamo con M^a l'insieme dei punti $x \in M$ tali che $f(x) \leq a$.

Teorema 28. *Sia f una mappa liscia a valori reali definita sulla varietà M. Siano $a < b$ due punti reali e supponiamo che $f^{-1}[a, b]$ sia un compatto che non contenga punti critici per f. Allora M^a è diffeomorfa a M^b. Inoltre, M^a è un retratto per deformazione di M^b, e l'inclusione $\iota\colon M^a \to M^b$ è un'equivalenza omotopica.*

Teorema 29. *Sia f come nel torema precedente, e p un punto critico non degenere di indice λ. Ponendo $c = f(p)$, supponiamo che $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ sia un compatto che non contenga punti critici per f oltre a p. Allora, per ε abbastanza piccolo, $M^{c+\varepsilon}$ ha lo stesso tipo di omotopia di $M^{c-\varepsilon}$ con l'attaccamento di una λ-cella e^λ.*

Definizione 30. Sia $S\colon \mathrm{Top} \times \mathrm{Top} \to \mathbb{Z}$ una mappa di coppie a valori interi; diciamo che S è *subadditiva* se

$$S(X,Z) \leq S(X,Y) + S(Y,Z) \ \ \forall\, Z \subseteq Y \subseteq X \in \mathrm{Top}.$$

La mappa S è invece detta *additiva* se vale l'uguaglianza.

Come esempio di funzione subadditiva possiamo considerare il rango dei gruppi di (co)omologia di coppia, ovvero

$$R_i(X,Y) := \mathrm{rk}(H_i(X,Y;\mathbb{Z})),$$

che è definita per ogni coppia di spazi (X,Y) di rango finito (il fatto che R_i sia una mappa subadditiva, segue dalla successione esatta della terna). Poiché la dimensione di uno spazio vettoriale è una funzione additiva, segue che lo è anche la caratteristica di Eulero $\chi(X,Y) = \sum_i (-1)^i R_i(X,Y)$.

Lemma 31. *Sia S una funzione subadditiva e consideriamo gli spazi $X_0 \subseteq \cdots \subseteq X_n$. Allora*

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1}).$$

Se S è additiva, vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.

Per $n = 1$ l'uguaglianza vale banalmente, mentre per $n = 2$ è la stessa definizione di (sub)additività.

Supponiamo che il risultato sia vero fino ad $n-1$, dunque $S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n-1} S(X_i, X_{i-1})$. Poiché S è subadditiva, $S(X_n, X_0) \leq S(X_n, X_{n-1}) + S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$, e la tesi è vera anche per n (il caso additivo è lo stesso, con $=$ al posto di $\leq$). $\square$

Dato il lemma, posto $X_0 = \emptyset$, otteniamo

$$S(X_n) := S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n} S(X_i, X_{i-1})$$

con l'uguaglianza se S è additiva.

Ritorniamo ora al caso di una varietà compatta M e di una funzione di Morse $f\colon M \to \mathbb{R}$. Se a non è un valore critico, dal teorema del rango si ha che M^a è una varietà con bordo (dato da $f^{-1}(a)$). Siano allora $a_0 < \cdots < a_k$ valori regolari per f, tali che M^{a_i} contenga esattamente i punti critici, $M^{a_0} = \emptyset$, e $M^{a_k} = M$. Possiamo allora considerare l'omologia relativa

$$H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}),$$

e utilizzare i teoremi di Morse per una miglior comprensione di tali gruppi.

Utilizzando il teorema 29, si ha infatti che $H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}})$, dove λ_i è l'indice di f nel punto critico tra $M^{a_{i-1}}$ e M^{a_i}. Usiamo ora il Teorema di escissione, che richiamiamo brevemente:

Teorema 32 (Teorema di escissione)**.** *Siano A e B sottospazi di uno spazio topologico X, tali che $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$. Allora l'inclusione $\iota\colon (B, A \cap B) \to (X, A)$ induce isomorfismi $H_n(B, A\cap B) \to H_n(X, A)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Nel nostro caso $X = M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}$, $A = M^{a_{i-1}}$ e prendiamo come B un intorno aperto di e^{λ_i} in X che si retragga su e^{λ_i}. Per escissione allora:

$$H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) = H_*(e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}} \cap e^{\lambda_i}) = H_*(e^{\lambda_i}, \partial e^{\lambda_i}).$$

Ma questa ottenuta è proprio l'omologia della sfera $S^{\lambda_i - 1}$; infatti si ha l'isomorfismo:

$$H_*(e^{\lambda_i}, \partial e^{\lambda_i}) = H_*(D^{\lambda_i}, \partial D^{\lambda_i}) = \tilde{H}_{*-1}(S^{\lambda_i - 1})$$

Infine, $\tilde{H}_{*-1}(S^{\lambda_i-1})$ è non nullo solo per l'indice λ_i, dove è pari a $\mathbb{Z}$ (e quindi di rango 1).

Ricordiamo ora che il rango dei gruppi di omologia è una funzione subadditiva, e dunque applicando la subadditività di R_i a $\emptyset = M^{a_0} \subseteq \cdots \subseteq M^{a_k} = M$, abbiamo:

$$R_\lambda(M) = R_\lambda(M, \emptyset) \leq \sum_{i=1}^{k} R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rk}(H_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})) = C_\lambda$$

dove C_λ è il numero di punti critici di indice λ.

Si ha di più: se prendiamo come funzione additiva proprio la caratteristica di Eulero-Poincaré χ, abbiamo analogamente:

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{k} \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^\lambda R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^\lambda \sum_{i=1}^{k} R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})$$

ovvero

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^\lambda C_\lambda$$

(nelle uguaglianze si è usato il fatto che l'omologia di una n-varietà è nulla per indici maggiori di n, e che le somme su indici finiti si possono scambiare).

Abbiamo provato il seguente:

Teorema 33 (Disuguaglianze deboli di Morse)**.** *Se C_λ denota il numero di punti critici di indice λ per una funzione di Morse definita su una n-varietà compatta M, allora*

$$R_\lambda(M) \leq C_\lambda$$

e

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^\lambda C_\lambda.$$

Abbiamo così ottenuto un modo per legare la caratteristica di Eulero-Poincaré ai punti critici di una funzione di Morse; il secondo passo è allora quello di legare la somma $\sum_{\lambda=1}^{n}(-1)^\lambda C_\lambda$ agli zeri di qualche campo vettoriale. Può venire allora l'idea di sfruttare i campi gradienti legati ad ogni funzione di Morse. Ricordiamo infatti che, se $p \in M$ è un punto critico per una funzione di Morse f, esiste per il Lemma di Morse una carta locale (U, φ) in cui si abbia $f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^m)^2$. Osserviamo allora che, localmente, ha senso considerare il gradiente $\eth\setminus\partial f = 2(-x^1, \ldots, -x^\lambda, x^{\lambda+1}, \ldots, x^m)$.

Se ciò valesse globalmente, potremmo trovare il campo vettoriale con somma degli indici pari alla caratteristica di Eulero-Poincaré cercato. Il gradiente, come scritto sopra nell'intorno di ogni punto critico, sarebbe infatti definito su tutto M, così da dare un campo vettoriale, e si scriverebbe come la riflessione sulle prime λ coordinate, dunque di indice $(-1)^\lambda$. Per il teorema precedente, $\chi(M) = \sum_{\lambda=1}^{n}(-1)^\lambda C_\lambda$; sostituendo a $(-1)^\lambda$ l'indice del campo vettoriale grad$f$ nel relativo punto critico di indice λ, si avrebbe:

$$\chi(M) = \sum_{z\in Z} \iota_{\mathrm{grad}f}(z)$$

con Z l'insieme dei punti critici per f, ovvero gli zeri del campo grad$f$.

Resta perciò da dare una scrittura globale del campo vettoriale gradiente. Per farlo, dobbiamo scegliere una metrica riemanniana g sulla varietà M, e porre il campo gradiente grad$f$ come l'unico campo vettoriale tale che il prodotto scalare grad$f \cdot X$ tra il gradiente e qualsiasi altro campo vettoriale X sia pari a $X(f)$. Il senso di questa definizione è che $X(f)$ rappresenta proprio la derivata direzionale di f lungo la direzione X; in più, scrivendo la relazione in coordinate locali, si ottiene

$$\mathrm{grad}f = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

per cui su $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta ritroviamo il gradiente usuale.

Il problema di questa definizione, è che il gradiente sarebbe funzione in p dei coefficenti g^{ij} a priori non conosciuti; inoltre la comparsa di tali coefficienti non permetterebbe di presentare ancora il gradiente, nelle carte date dal Lemma di Morse, come grad$f = 2(-x^1, \dots, -x^\lambda, x^{\lambda+1}, \dots, x^m)$. L'idea è allora quella di costruire una metrica riemanniana ad hoc, in modo da preservare queste proprietà a noi indispenzabili per la dimostrazione del Teorema di Poincaré-Hopf.

A questo scopo, fissiamo una varietà compatta M ed una funzione di Morse f ivi definita; osserviamo che i punti critici di f sono isolati (l'hessiano di carta è non degenere) e che sono in numero finito in quanto la varietà è compatta. Per ognuno di tali punti critici $x \in M$ possiamo considerare l'intorno coordinato U_x dato dal Lemma di Morse (in cui f si rappresenta come $f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^m)^2)$. Vogliamo che ogni x appartenga ad una sola carta, e a questo scopo fissiamo per ogni x un numero reale $\varepsilon_x > 0$ tale che $B(x, 2\varepsilon_x)$ sia una palla tutta contenuta in U_x, e l'intersezione a due a due di tali palle sia vuota (ciò è possibile in quanto gli zeri sono isolati). Sia ora

$$\overline{M} = M - \left(\bigcup_x B(x, 2\varepsilon_x)\right).$$

Per ogni $p \in \overline{M}$, prendiamo una carta (U_p, φ_p) che, a meno di restrizioni, possiamo supporre disgiunta dall'unione $\cup_x B(x, \varepsilon_x)$. L'insieme dato da tali carte, e dalle palle $B(x, 2\varepsilon)$ formano un ricoprimento aperto, da cui possiamo estrarre un sottoricoprimento finito. Osserviamo che, poiché ogni x appartiene esclusivamente all'aperto $B(x, 2\varepsilon)$, questi ultimi fanno sicuramente parte del sottoricoprimento considerato, e, come richiesto, f si scrive come volevamo in tutto $B(x, \varepsilon_x)$.

Passiamo ora alla realizzazione del campo vettoriale gradiente: dato l'atlante finito appena costruito, diciamo $U_1, \dots, U_k$, possiamo considerare la partizione dell'unità a lui associata $\{\rho_i\}$; su ciascun aperto U_i introduciamo la metrica piatta g^i indotta dal sistema di coordinate, ovvero per $p \in U_i$ si ha $g^i_p(v, w) = \sum_j v^j w^j$, dove $v = \sum_j v^j \partial_j$ e $w = \sum_j w^j \partial_j$ sono in T_pU_i. Definiamo allora il tensore metrico globale come

$$g_p = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(p) g^i_p \ \ \forall p \in M.$$

Con questa costruzione, (M, g) diventa una metrica riemanniana; possiamo allora considerare il gradiente in funzione di questa metrica:

$$\mathrm{grad}f = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Il vantaggio di questa costruzione, è quello di aver lasciato su ogni intorno $B(x, \varepsilon)$ le coordinate iniziali e la metrica piatta richiesta. Per le osservazioni già fatte, ciò ci suggerisce che siamo sulla strada giusta; procediamo dunque con le opportune verifiche.

Prima di tutto, osserviamo che i punti critici per f coincidono con gli zeri del campo gradiente, in quanto se avessimo $\mathrm{grad} f(p) = 0$ allora o tutti i g_p^{ij} sarebbero nulli, che non è possibile in quanto la metrica è non degenere, oppure $\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0$ per ogni j, ovvero p sarebbe un punto critico per f. Viceversa, ogni punto critico per f è uno zero di $\mathrm{grad} f$.

Il differenziale $\mathrm{d}(\mathrm{grad} f)_x$ in un punto critico x si scrive nelle carte scelte, come già visto nelle sezioni precedenti, nella forma matriciale $(\partial(\mathrm{grad} f)^j / \partial x^i)$, e dunque:

$$\frac{\partial(\mathrm{grad} f)^j}{\partial x^i} = \frac{\partial(\pm(x^j)^2)}{\partial x^i} = \pm 2x^j \delta_i^j.$$

a seconda che $j \leq \lambda$ o $j > \lambda$, con λ indice di negatività per f. Possiamo dunque notare che il differenziale di f in queste coordinate, è rappresentato proprio dalla matrice delle derivate seconde, e poiché f era di Morse, tale matrice è non singolare. Ciò implica che lo zero x è non degenere anche per la definizione data nella sezione precedente, e che dunque l'indice di $\mathrm{grad} f$ in x è pari al determinante del suo differenziale, che è esattamente $(-1)^\lambda$.

Insieme a quanto detto precedentemente, abbiamo ottenuto che ad ogni funzione di Morse possiamo associare il campo gradiente, e che tale campo è proprio quello necessario ad ottenere l'uguaglianza cercata:

$$\chi(M) = \sum_{z \in Z} \iota_{\mathrm{grad} f}(z).$$

5 Conclusione

Rienunciamo il teorema oggetto del seminario:

Teorema 34 (Teorema di Poincaré-Hopf)**.** *Sia V un campo vettoriale di zeri isolati su una varietà compatta M; se M ha bordo non vuoto supporremo sempre che il campo vettoriale punti verso l'esterno in tutti i punti di bordo. Allora la somma degli indici di V negli zeri isolati uguaglia la caratteristica di Eulero della varietà, ovvero*

$$\sum_{z \in Z} \iota_V(z) = \chi(M).$$

Per il Teorema 23, se M è una varietà compatta e senza bordo, la somma degli indici di un campo vettoriale X ivi definito, e di zeri non degeneri, è un invariante, mentre per quanto sviluppato mediante la teoria di Morse, tale somma deve essere pari alla caratteristica $\chi(M)$. Dunque il Teorema di Poincaré-Hopf, sotto queste condizioni, è dimostrato. Per passare al caso generale di campi vettoriali con solo zeri isolati, definiti su una varietà compatta e senza bordo, procediamo come segue.

Come di consueto, ricominciamo col considerare la situazione per aperti di $\mathbb{R}^k$. Sia allora $V : U \to \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale e supponiamo che V abbia uno zero isolato $z \in U$. Allora possiamo prendere un $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo tale che $\overline{B(z, 2\varepsilon)} \cap Z = \{z\}$.

Sia $f : U \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$ sulla palla $B(z, \varepsilon)$ e che $f(x) = 0$ su $U - B(z, 2\varepsilon)$. L'idea è ora quella di perturbare il campo vettoriale di partenza in modo da rendere gli zeri del nuovo campo vettoriale non degeneri (chiaramente se z era uno zero già non degenere non facciamo nulla).

Definiamo allora il nuovo campo vettoriale come

$$\hat{V}(x) = V(x) - f(x)y$$

dove y è un valore regolare per V (ed esiste per il teorema di Sard). Osserviamo che il campo $\hat{V}$ differisce dal campo V solo in $B(z, 2\varepsilon)$.

Per ogni $x \in B(z, 2\varepsilon) - B(z, \varepsilon)$, per la scelta di ε, si ha $V(x) \neq 0$, perciò esiste un $\delta > 0$ tale che $||V(x)|| > \delta$ per i punti $x \in B(z, 2\varepsilon) - B(z, \varepsilon)$ (posso infatti cercare il minimo di $||V(x)||$ al variare di x nel compatto $\{x \mid \varepsilon \leq ||x - z|| \leq 2\varepsilon\}$). Possiamo dunque scegliere y abbastanza piccolo tale che $0 < ||y|| < \delta$ (un tale y esiste ancora per il teorema di Sard e poiché V è una funzione continua su U).

Con queste richieste osserviamo che tutti gli zeri del nuovo campo vettoriale sono contenuti in $B(z, \varepsilon)$; infatti se $\hat{V}(x) = 0$, allora

$$V(x) - f(x)y = 0 \iff ||V(x)|| = ||f(x)y|| \leq ||y||$$

che è impossibile se $x \in B(z, 2\varepsilon) - B(z, \varepsilon)$, per la scelta di y.

Inoltre, poiché f è una funzione costante su tutto $B(z, \varepsilon)$, preso z' uno zero per $\hat{V}$, si ha che

$$d\hat{V}_{z'} = dV_{z'} + 0$$

e poiché $V(z') = f(z')y = y$ è un valore regolare per V, da questa uguaglianza si ottiene che $dV_{z'}$, e quindi $d\hat{V}_{z'}$, è un isomorfismo. Perciò lo zero z' è non degenere.

Ciò detto, perturbando il campo vettoriale di partenza abbiamo ottenuto un campo vettoriale con tutti gli zeri non degeneri; resta da verificare che la somma degli indici non cambia. A questo scopo, ricordiamo che l'indice $\iota_V(z)$ si calcola utilizzando il grado di $V/||V||$ sulla sfera $S(z, 2\varepsilon)$; ma su tale sfera, i campi V e $\hat{V}$ coincidono. Se Z' è invece l'insieme degli zeri per $\hat{V}$, allora per il Lemma di estensione, la somma degli indici $\sum_{z' \in Z'} \iota_{\hat{V}}(z')$ è pari al grado di $\hat{V}/||\hat{V}||$, e dunque il claim. Infine, per il Teorema 23 si ha $\sum_{z' \in Z'} \iota_{\hat{V}}(z')$ è pari al grado della mappa di Gauss. Mettendo il tutto insieme, abbiamo ottenuto l'enunciato del Teorema di Poincaré-Hopf nel caso di campi vettoriali definiti su aperti di $\mathbb{R}^n$. Come al solito, poiché ciò dimostrato è puramente locale, il teorema vale anche per varietà compatte, e senza bordo.

Resta da considerare il caso di varietà con bordo. Il problema, in queste ipotesi, è che non possiamo riconduri propriamente al Teorema 23; infatti possiamo ancora immergere M in qualche $\mathbb{R}^k$ e considerare l'intorno tubulare chiuso N_ε in modo da estendere il campo vettoriale X a tutto N_ε, con l'estenzione che punta verso l'esterno su ∂N_ε. Tale campo vettoriale però non è C^∞, anzi è solo continuo negli intorni di ∂M. Si può però verificare che l'ipotesi di C^∞ non è realmente necessaria, e dunque il Teorema vale anche in queste condizioni più degeneri.

Concludiamo con alcune conseguenze:

Esempio 35.

- La sfera S^m ha caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(S^m) = 1 + (-1)^m$; se m è pari, allora S^m ha caratteristica 2, quindi la somma degli indici di qualsiasi campo vettoriale è pari a 2. Ciò fornisce un'ulteriore dimostrazione del fatto che ogni campo vettoriale su S^{2n} ha almeno uno zero.

- Ogni m-varietà M di dimensione dispari, compatta e senza bordo ha caratteristica di Eulero-Poincaré nulla. Infatti, ogni campo vettoriale X può essere scambiato con il suo opposto $-X$; in tal modo ogni indice è moltiplicato per $(-1)^m = -1$, e quindi

$$\sum_z \iota_X(z) = \sum_z \iota_{-X}(z) = -\sum_z \iota_X(z)$$

  ovvero $0 = \sum_z \iota_X(z) = \chi(M)$.

- Se M è parallelizzabile, ovvero ammette fibrato tangente banale, allora M ha caratteristica nulla; in particolare, la caratteristica di un gruppo di Lie deve essere nulla, poiché ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.